6 класс

Задача 1. а) Впишите в клеточки четыре различные цифры, чтобы произведение дробей равнялось $\frac{20}{21}$:

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{20}{21}.$$

Решите эту задачу для трёх других арифметических действий:

б) деления;

в) вычитания;

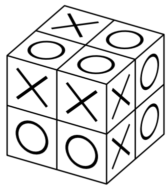
г) сложения. **[*4 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ.

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{21}, \quad \frac{4}{3} : \frac{7}{5} = \frac{20}{21}, \quad \frac{9}{7} - \frac{1}{3} = \frac{20}{21}, \quad \frac{4}{6} + \frac{2}{7} = \frac{20}{21}.$$

Есть и другие примеры. Интересно, что в последнем задании не удаётся обойтись несократимыми дробями.

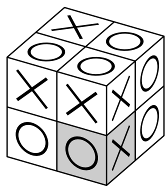
Задача 2. а) Мальвина разбила каждую грань куба $2 \times 2 \times 2$ на единичные квадраты и велела Буратино в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами. На рисунке показано, как Буратино выполнил задание (видно только три грани). Докажите, что Буратино ошибся.



б) Помогите Буратино выполнить задание правильно. Достаточно описать хотя бы одну верную расстановку.

[*5 баллов*] (*М. А. Евдокимов*)

Решение. а) Представим себе, что кубик сложен из восьми единичных кубиков, и посмотрим на закрашенный на рисунке кубик. Что бы Буратино ни написал на его нижней грани, требование Мальвины будет нарушено. Если там будет крестик, то нолик на его передней грани будет граничить



с тремя крестиками. Если там будет нолик, то крестик на боковой грани будет граничить с тремя ноликами.

б) Существуют (с точностью до поворотов куба) три различные расстановки крестиков и ноликов. Можно (рис. 1) на верхней грани нарисовать нолики, на нижней крестики, а боковые грани разметить «слоями». Второй способ (рис. 2) заключается в том, чтобы представить себе куб сложенным из восьми единичных кубиков (на четырёх из которых нарисованы только крестики, а на четырёх только нолики) в шахматном порядке. Наконец, третий способ представлен на рисунке 3. Невидимые грани будут размечены «противоположно» видимым: в клетках, симметричных относительно центра кубика клеткам с крестиками, стоят нолики, и наоборот.

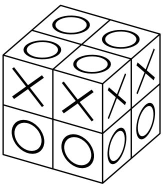


Рис. 1

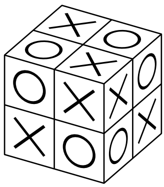


Рис. 2

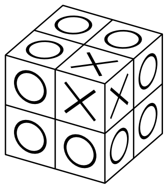


Рис. 3

Задача 3. Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идёт из дома в школу — Вася шёл 8 минут, а Петя шёл 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идёт из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идёт домой задом наперёд. А какой длительности получился ролик? **[*5 баллов*]**

(*И. В. Ященко*)

Ответ. 5 минут.

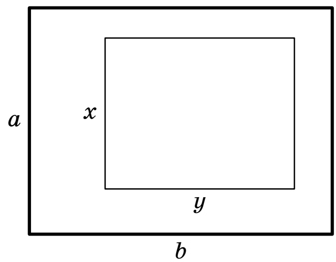
Решение. Давайте на одном мониторе запустим получившийся ролик, а на другом — Петино видео целиком с конца. Тогда мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, а после этого они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности таких двух видео равны.

Задача 4. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать её по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 — это тоже полоска!) **[*6 баллов*]**

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 21.

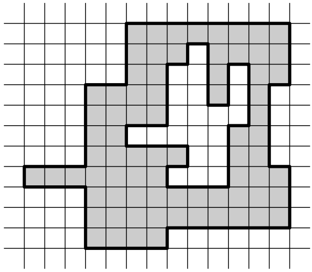
Первое решение. Пусть прямоугольник занимает a клеток по вертикали и b по горизонтали, $a+b=50:2=25$. Аналогично пусть размеры дырки — x клеток по вертикали и y по горизонтали, $x+y=32:2=16$.



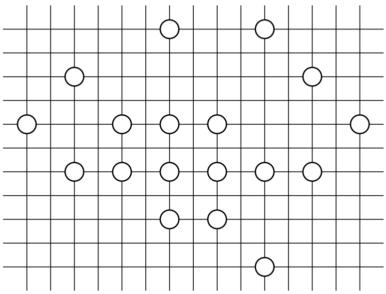
Если бы дырки не было, было бы a горизонтальных полосок. Дырка разрезает x из них на две части, так что всего горизонтальных полосок $a+x$, что по условию равно 20. Аналогично вертикальных полосок будет $b+y$. Но $a+b+$ $+x+y=25+16=41$ и $a+x=20$. Значит, $b+y=41-20=21$.

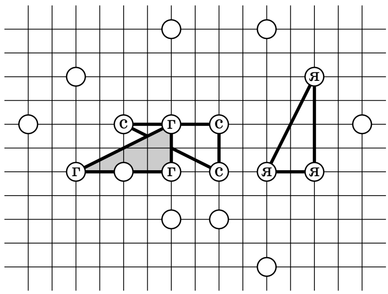
Второе решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим её левую и правую стороны, а для каждой вертикальной — верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, т. е. $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

Комментарий. Второе решение более общее — оно работает и в том случае, когда фигура и дырка имеют сложную многоугольную форму (см. рис.).



Задача 5. Царь пообещал награду тому, кто сможет на каменистом пустыре посадить красивый фруктовый сад. Об этом узнали два брата. Старший смог выкопать 18 ям (см. рис. слева). Больше нигде не удалось, только все лопаты сломал. Царь рассердился и посадил его в темницу. Тогда младший брат Иван предложил разместить яблони, груши и сливы в вершинах равных треугольников (см. рис. справа), а остальные ямы засыпать.





Царь ответил так:

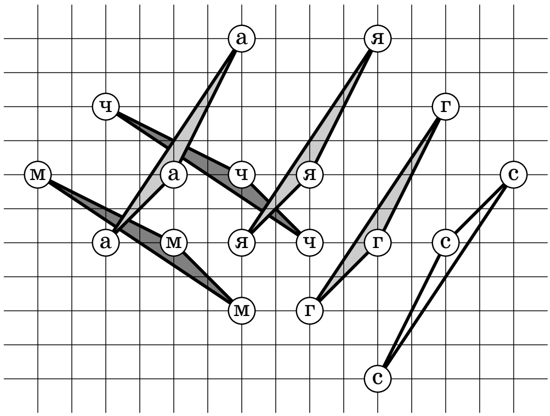
— Хорошо, если деревьев каждого вида будет ровно по три и они будут расти в вершинах равных треугольников, выйдет красиво. Но три вида — слишком мало. Если кроме яблонь, груш и слив будут ещё и абрикосы — отпущу брата. Если добавишь пятый вид — черешню — заплачу за работу. Мне ещё миндаль нравится, но шесть треугольников ты тут не сможешь разместить.

— А если смогу?

— Тогда проси чего хочешь!

Иван задумался, не получить ли заодно и полцарства. Подумайте и вы: разместите как можно больше видов деревьев в вершинах равных треугольников. (Равенство треугольников означает равенство всех его сторон и углов, то есть точное совпадение при наложении; треугольники можно поворачивать и переворачивать. В одной яме может расти только одно дерево.) **[*7 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

Решение. Иван может спасти брата, заработать денег и даже (если царь сдержит слово) получить полцарства, посадив все 6 видов деревьев как на рисунке.



Других способов посадить все 6 видов деревьев не существует; а вот посадить только 4 или 5 видов деревьев можно многими различными способами.

Задача 6. На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички с указанием масс, на которых написано 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гирьки массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупателю разрешается только один тип взвешиваний: положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гирьки — на другую и убедиться, что масса на соответствующей табличке указана верно. Однако за каждую взятую гирьку нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гирька снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает её. Какую наименьшую сумму придётся заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов? **[*8 баллов*]**

(*А. В. Грибалко*)

Ответ. 800 монет.

Решение. *Пример.*

Какие гири покупаем	Что взвешиваем	Сколько монет мы заплатили
1	$1=\mathbf{1}$	100
2	$1+2=\mathbf{3}$, $2=\mathbf{2}$	200
4	$2+4=\mathbf{6}$	300
1	$1+2+4=\mathbf{7}$, $1+4=\mathbf{5}$, $4=\mathbf{4}$	400
8	$4+8=\mathbf{12}$	500
1	$1+4+8=\mathbf{13}$	600
2	$1+2+4+8=\mathbf{15}$, $2+4+8=\mathbf{14}$, $2+8=\mathbf{10}$	700
1	$1+2+8=\mathbf{11}$, $1+8=\mathbf{9}$, $8=\mathbf{8}$	800

Оценка. Переходя к каждому взвешиванию, мы либо покупаем одну или несколько гирек, либо отдаём их продавцу. Поэтому мы в сумме купили и отдали $N \geqslant 15$ гирек. При этом после последнего взвешивания у нас на руках есть хотя бы одна гирька, так что мы купили больше, чем отдали. Это значит, что мы купили более половины от N, т. е. как минимум 8 гирек, а значит, заплатили жадному продавцу не менее 800 монет.

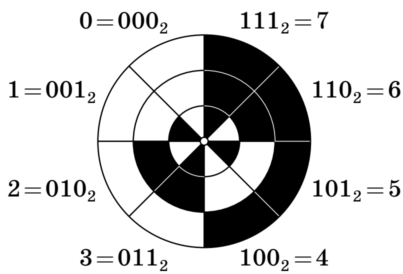
Оценка (другой способ). Представим себе, что плата за каждую гирьку разделена на две части: 50 монет покупатель платит, когда берёт гирьку, а ещё 50 — когда отдаёт. Если считать, что в конце все гирьки возвращаются продавцу, то при таком способе расчёта суммарная плата не изменится.

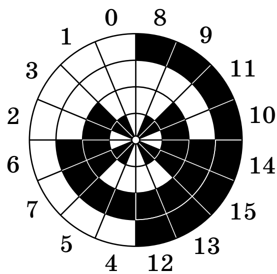
Рассмотрим 16 моментов: начало, когда покупатель берёт первые гирьки, 14 интервалов между взвешиваниями, и конец, когда покупатель отдаёт оставшиеся гирьки. В каждый из этих моментов покупатель производит какое-нибудь действие (что-то берёт или что-то отдаёт), поэтому должен заплатить не менее 50 монет, а всего ему придётся заплатить не менее $50 \cdot 16 = 800$ монет.

Комментарий. Из решения видно, что оптимальный порядок взвешивания перебирает все возможные наборы гирек, причём соседние наборы отличаются добавлением или удалением ровно одной гирьки. Такая последовательность наборов называется *кодом Грея*.

Зачем были придуманы коды Грея? Представьте себе, что нам почему-то хочется знать положение вращающегося диска. Если его хочется знать совсем приблизительно, то можно покрасить одну половину диска в чёрный цвет, а другую в белый и поставить фотодатчик. Теперь мы всегда знаем, какой половиной диск повёрнут к датчику.

Но пусть мы хотим большей точности. Можно поставить несколько фотодатчиков и покрасить на диске несколько колец, а в каждом секторе написать его номер чёрными и белыми полосами как двоичным кодом (см. рис. слева).





Но тогда на границе секторов датчики могут сработать не совсем одновременно, и между 001 и 010 мы «увидим» 011 или 000. Для такой ситуации и были придуманы коды Грея: если на границе двух секторов меняется цвет только одного из колец, то в любом случае получить можно только код одного из этих секторов.

Любое оптимальное решение задачи оказывается кодом Грея для 4 колец и 16 секторов (на рис. справа использован код Грея из решения задачи).